ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω δύο ομοιοθεσίες $H_{O,k}$ και $H_{P,\lambda}$.

Η σύνθεση αυτών είναι

1) αν $k\cdot\lambda \neq 1 \Rightarrow$ είναι ομοιοθεσία κέντρου T επί της ευθείας OP και λόγου ίσου μ $k\cdot\lambda$

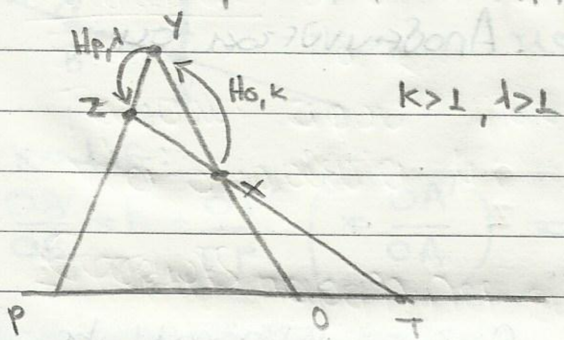
2) αν $k\cdot\lambda = 1 \Rightarrow$ είναι μεταφορά κατά διάνυσμα παράλληλο του διανύσματος $\vec{OP}$

Απόδειξη

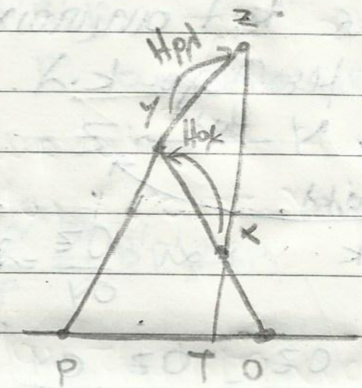
1) Έστω X σημείο, $H_{O,k}$ και $Y = H_{O,k}(X)$ $\Big\} \Rightarrow$

Έστω επίσης $H_{P,\lambda}$ και $Z = H_{P,\lambda}(Y)$

$\Rightarrow H_{T,k\lambda}$ και $Z = H_{T,k\lambda}(X)$



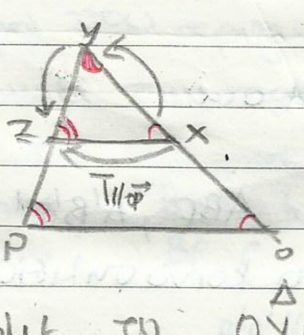
$k>1,\ \lambda>1$



2) αν $k\lambda = 1 \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} H_{O,k} \\ H_{P,\lambda} \end{matrix}\right\}$ Η σύνθεση είναι μεταφορά

$k>1$

$\lambda<1$



$Y = H_{O,k}(X)$

$Z = H_{P,\lambda}(Y)$

όμοια και η περίπτωση όπου $k<0$ και $\lambda<0$

Θεωρούμε το $\overset{\triangle}{OYP}$ και X εσωτερικό σημείο της OY και Z εσωτερικό σημείο της PY

$$\frac{XY}{OY} = \frac{OY-OX}{OY} = 1-\frac{OX}{OY} = 1-\frac{1}{k}$$

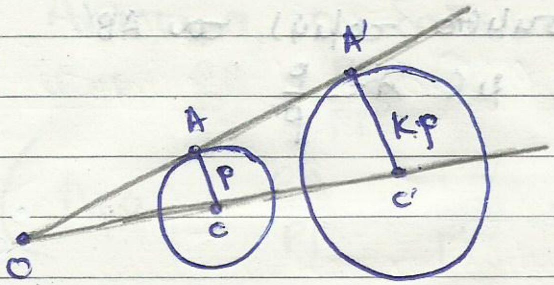
$$\frac{ZY}{PY} = \frac{PY-PZ}{PY} = 1-\frac{PZ}{PY} = 1-\lambda \overset{k\lambda=1}{=\!=\!=} 1-\frac{1}{k}$$

Αν μια ευθεία ορίζει στις προεκτάσεις πλευρών τμήματα ανάλογα $\Rightarrow$ αυτή παράλληλη προς την 3η $\Rightarrow XZ // OP \Rightarrow$

$\Rightarrow YXZ \approx Y\hat{P}O \Rightarrow \frac{XZ}{PO} = \frac{ZY}{PY} = 1-\lambda \Rightarrow XZ = (1-\lambda)PO$

Το X μεταφερθ. στο Z παράλληλο στο OP

Παρατήρηση: Μια ομοιοθεσία $H_{O,k}$ απεικονίζει κύκλο ακτίνας ρ σε κύκλο ακτίνας .



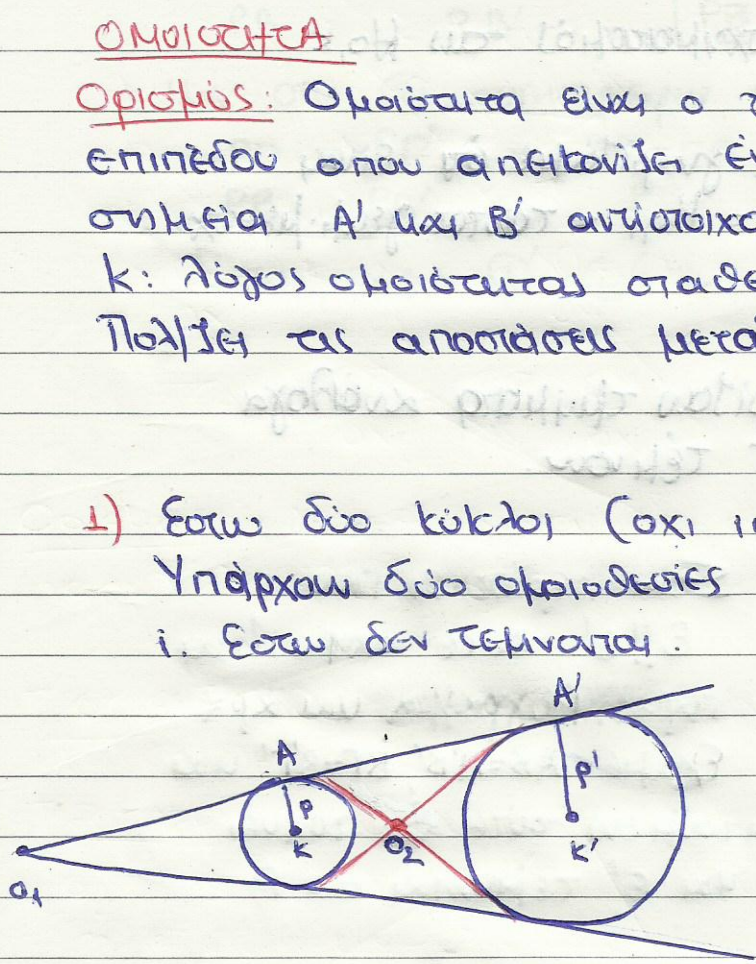
$\frac{A'C'}{AC} = k$.

Έστω A' το ομοιόθετο του A $H_{O,k}(A) = A'$. Το C' ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από το A και $\frac{A'C'}{AC} = k \Rightarrow$
$\Rightarrow A'C' = k\rho$

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Ομοιότητα είναι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου όπου απεικονίζει ένα ζεύγος σημείων A, B σε σημεία A' και B' αντίστοιχα έτσι ώστε $A'B' = k\,AB$
k: λόγος ομοιότητας σταθερός ($k>0$)
Πολλ/ζει τις αποστάσεις μεταξύ σημείων

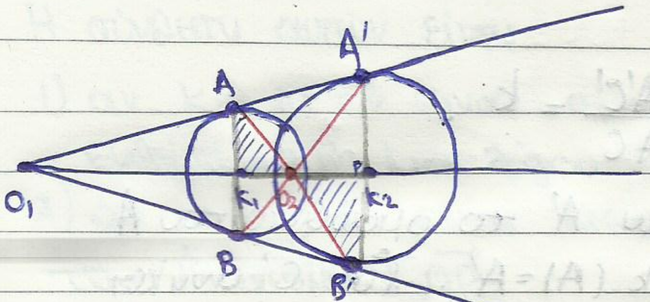
1) Έστω δύο κύκλοι (όχι ίσοι / όχι ίδια κέντρα)
Υπάρχουν δύο ομοιοθεσίες που απεικονίζουν τον ένα στον άλλον
i. Έστω δεν τέμνονται.



• Η ομοιοθεσία έχει κέντρο O_1 το σημείο τομής των εξωτερικών εφαπτομένων και λόγο: $k = \frac{A'k'}{Ak} = \frac{\rho'}{\rho}$

• Η ομοιοθεσία έχει κέντρο O_2 (το σημείο τομής των εσωτερικών εφαπτομένων) και λόγο $\lambda = -\frac{\rho'}{\rho}$

2) Έστω δύο κύκλοι τεμνόμενοι
Και εδώ υπάρχουν δύο ομοιοθεσίες που απεικονίζουν τον ένα στον άλλον.
• Η ομοιοθεσία κέντρου O_1 με λόγο ομοιοθεσίας $\frac{\rho'}{\rho}$
Το O_1 είναι σημείο τομής των εξωτερικών εφαπτομένων



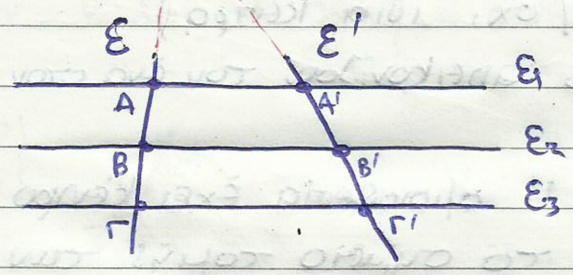
• Η ομοιοθεσία με κέντρο O_2 το σημείο τομής του AB' $A'B$ με $\lambda = -\frac{\rho}{\rho'}$

Τα τρίγωνα AK_1O_2 και $B'K_2O_2$ είναι όμοια

Παρατήρηση: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $H_{O,k}$ είναι η $H_{O,1/k}$.
Πράγματι αφού $H_{O,k} \circ H_{O,1/k}$ γνωρίζουμε ότι είναι νέα ομοιοθεσία με $H_{O,k\frac{1}{k}} = H_{O,1}$ = ταυτοτ. γεωμ. μετασχ.

Εφαρμογές:

1) Τρείς παράλληλες ευθείες ορίζουν τμήματα ανάλογα σε δύο ευθείες που τις τέμνουν



Στην περίπτωση που $\varepsilon \parallel \varepsilon'$ τότε σχηματίζονται παραλληλόγραμμα και άρα έχουμε $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και το ζητούμενο τότε θα ισχύει.

Στην περίπτωση όπου ε και ε' τέμνονται στο P

Θδο

$$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{A'B'}$$

Το κέντρο ομοιοθεσίας θεωρούμε να είναι το P και η ομοιοθεσία $H_{P,\frac{PB}{PA}}$ επεικονίζει το $P\hat{A}A'$ στο $P\hat{B}B'$ όπως $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $P \to P$, $A \to B$ αφού πράγματι $\frac{PB}{PA}$ λόγος της ομοιοθεσίας
Έτσι, η εικόνα του A' θα είναι το B' αφού ψάχνω σημείο που ανήκει στην ε_2 που είναι μοναδική και περνά από το B $\Rightarrow P\hat{A}A' \approx P\hat{B}B'$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{PA'}{PB'} \quad (1)$$

Αντίστοιχα, αν δουλεύαμε στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{PBB'}$ και $\overset{\triangle}{P\Gamma\Gamma'}$ $\left(H_{P,\frac{P\Gamma}{PB}}\right)$

Έτσι, $\frac{PB}{P\Gamma} = \frac{PB'}{P\Gamma'}$ (2)

$$\left(\text{Άρα, } \frac{PA}{P\Gamma} = \frac{PA'}{P\Gamma'} \Rightarrow \frac{PA - P\Gamma}{P\Gamma} = \frac{PA' - P\Gamma'}{P\Gamma'} \Rightarrow \boxed{\frac{A\Gamma}{P\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{P\Gamma'}} \right)$$

Αλλά δουλεύοντας στην (1) έχουμε

$$\frac{PA - PB}{PB} = \frac{PA' - PB'}{PB'} \Leftrightarrow \boxed{\frac{AB}{PB} = \frac{A'B'}{PB'}} \quad (1)'$$

και στη (2) αντιστρέφω

$$\frac{P\Gamma}{PB} = \frac{P\Gamma'}{PB'} \Rightarrow \frac{P\Gamma - PB}{PB} = \frac{P\Gamma' - PB'}{PB'} \Rightarrow \boxed{\frac{B\Gamma}{PB} = \frac{B'\Gamma'}{PB'}} \quad (2)'$$

Έτσι, από (1)', (2)' $\Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{B'P'}{A'B'}$